

Título: Convergencia de series de Dirichlet
Títol: Convergència de sèries de Dirichlet
Title: Convergence of Dirichlet series

Tutor: Pablo Sevilla
Cotutor: José Bonet

Palabras clave: Serie de Dirichlet, función holomorfa, convergencia uniforme, convergencia absoluta.

Resumen

Una serie de Dirichlet generalizada es una serie (en principio formal) de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, donde $a_n \in \mathbb{C}$, s es una variable compleja y λ_n es una sucesión de números positivos estrictamente creciente y tendiendo a ∞ . Tomando $\lambda_n = n$ y haciendo el cambio de variable $z = e^{-s}$ recuperamos las series de potencias en una variable compleja, pero haciendo $\lambda_n = \log n$ lo que tenemos son las series de Dirichlet clásicas $\sum a_n n^{-s}$.

Es bien sabido que los dominios naturales de convergencia de las series de potencias son los discos y que el radio que define disco más grande en el que la serie converge y converge absolutamente es el mismo.

En el caso de series de Dirichlet la situación es muy distinta. En primer lugar los dominios naturales de convergencia son semiplanos en el plano complejo. En segundo lugar, los semiplanos maximales de convergencia y de convergencia absoluta pueden no coincidir. Entre estos dos semiplanos aparece entonces un tercer semiplano definido como el mayor en el que la serie (entendida como una sucesión de funciones dada por las sumas parciales) converge uniformemente.

El objetivo del trabajo es estudiar con detalle la convergencia de series de Dirichlet, cubriendo los siguientes aspectos.

1. Las series de Dirichlet convergen en semiplanos y, donde lo hacen, definen una función holomorfa.
2. Cada serie de Dirichlet tiene asociadas tres abscisas que definen los semiplanos maximales de convergencia, convergencia uniforme y convergencia absoluta.
3. Diferenciación de estas abscisas.
4. Fórmulas explícitas para el cálculo de las abscisas (fórmulas de Bohr-Cahen).
5. Para cada serie de Dirichlet el semiplano de convergencia uniforme coincide con el mayor semiplano en el que define una función holomorfa y acotada.

Referencias

- [1] H. Queffélec and M. Queffélec. *Diophantine approximation and Dirichlet series*, volume 2 of *Harish-Chandra Research Institute Lecture Notes*. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2013.