

Propuesta de Trabajo Fin de Máster

Título: Principios Variacionales y Optimización

Títol: Principis Variacionals i Optimizació

Title: Variational Principles and Optimitzation

Tutores: Vicente Montesinos Santalucía, Antonio José Guirao Sánchez

Palabras clave: Principio Variacional, optimización, Bishop–Phelps–Bollobás

Descipción del Proyecto: Estudiar los principios variacionales clásicos, sus contrapartidas suaves, así como las aplicaciones prácticas de tales perturbaciones en procesos de minimización.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal y continua. Para f se define la norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$ donde B_X es bola unidad de X —el conjunto de puntos de X que distan como mucho uno del origen. No es cierto en general que f alcance su norma, es decir, no es cierto que el problema de optimización consistente en encontrar un $x \in B_X$ tal que $f(x) = \|f\|$ tenga siempre solución. Es bien conocido que este problema tiene solución para toda f sí y sólo sí X es un espacio reflexivo. Ahora bien, en un espacio general, dada una f que no alcanza su norma, ¿podemos encontrar tan cerca cómo queramos otra función g que sí alcance la norma? La respuesta es afirmativa y la dieron en 1961 E. Bishop y R. R. Phelps. Algunos años después B. Bollobás señaló una mejora que supone el bien conocido Teorema de *Bishop–Phelps–Bollobás*.

Este tipo de resultado, característico del cálculo variacional, consiste en encontrar una perturbación pequeña de la función que queremos optimizar —y que quizás no sea optimizable— para obtener una nueva función —muy parecida a la primera— y que alcanza sus extremos.

En este proyecto planteamos el estudio de los principios variacionales clásicos —Ekeland, Brøndsted–Rockafellar, Stegall— su relación y equivalencia con propiedades geométricas de los espacios de Banach —propiedad drop y otras— y su aplicación para obtener el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. De especial interés en muchos contextos son los principios variacionales suaves que también pueden ser objeto de estudio. Finalmente, este proyecto plantea el estudio de las aplicaciones prácticas de estos resultados en los procesos de minimización.