Trabajo Final de Máster
INVESTMAT

Tutor: Pep Mulet Mestre

Títol: Métodos numéricos de alto orden para leyes de conservación hiperbólicas

Resumen: El objetivo de este trabajo es el diseño y análisis de métodos numéricos de alto orden para sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. Este tipo de sistemas aparece en multitud de modelos físicos como consecuencia de principios básicos de conservación de ciertas magnitudes que gobiernan el modelo. La hiperbolicidad de estos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden es una condición necesaria para que los problemas de Cauchy asociados sean asintóticamente estables y suele asociarse con velocidades finitas de propagación de perturbaciones (ondas).

Un hecho fundamental que complica este tipo de ecuaciones es que las soluciones desarrollan discontinuidades de salto (ondas de choque) en tiempo finito, aún partiendo de condiciones iniciales perfectamente suaves, lo cual motiva la introducción de conceptos de solución débil. Además, fórmulas cerradas para la solución de estas ecuaciones son muy poco frecuentes, por lo que se necesitan métodos numéricos para su aproximación.

En la primera parte de este trabajo se introducen las leyes de conservación hiperbólicas, algunos ejemplos relevantes, solución por características, soluciones débiles (ondas de choque y rarefacción) y condiciones de entropía.

En la segunda se analizan métodos numéricos generales (consistencia, estabilidad) y se prueba que, en presencia de discontinuidades, sólo un tipo especial de métodos, los conservativos (o de captura de ondas de choque), pueden aproximar correctamente las soluciones débiles. Se introducen métodos en volúmenes finitos y resolvedores de Riemann, exactos o aproximados, los cuales dan lugar a métodos de primer orden tales como Lax-Friedrichs, Godunov, Roe, HLL, etc.

En la tercera parte se exponen técnicas para obtener métodos de orden mayor que uno y las dificultades para obtenerlos de manera no oscilatoria. Las técnicas presentadas están basadas en reconstrucciones polinómicas esencialmente no oscilatorias (ENO, WENO) y resolvedores de sistemas de EDO provinientes de métodos de líneas que posean la propiedad SSP (Strong Stability Preserving) para paliar posibles oscilaciones.

Abstract: The goal of this project is the design and analysis of high-order accurate numerical methods for hyperbolic systems of conservation laws. This type of systems appears in many physical models as consequence of basic principles for conservation of the magnitudes governing the model. Hyperbolicity of these systems of partial differential equations is a necessary conditions for the associated Cauchy problems being asymptotically stable and it is usually associated with finite speeds of propagation of disturbances (waves).

A main feature that complicates this type of equations is the development of jump discontinuities (shock waves) in the solution in finite time, even from perfectly smooth initial data, a fact that motivates the introduction of the concept of weak solutions. Furthermore, closed formulas for solutions of these equations are seldom found, thus the need for numerical methods for their approximation.

In the first part of the project hyperbolic conservation laws are introduced, along with some relevant examples, solution by characteristics, weak solutions (shock and rarefaction waves) and entropy conditions.

In the second part general numerical methods are analyzed (consistency, stability) and it is proven that, when discontinuities are present, only a special type of methods, in conservative form (or shock capturing), can correctly approximate weak solutions. Finite volume methods are introduced and some Riemann solvers, either exact or approximate, are presented in order to obtain well-known first order methods such as Lax-Friedrichs, Godunov, Roe, HLL, etc.

The third part deals with some techniques for obtaining numerical methods of an accuracy order higher than one and the difficulties of doing so in a non-oscillatory manner. The techniques presented to achieve this goal are based on polynomial reconstructions (MUSCL, ENO, WENO) and ODE solvers with the Strong Stability Preserving (SSP) property to alleviate possible oscillations.

Bibliografía:

- **Randall J. LeVeque.** *Numerical methods for conservation laws.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

- **Randall J. LeVeque.** *Finite volume methods for hyperbolic problems.* Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

- **Chi-Wang Shu.** Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. In *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations (Cetraro, 1997)*, volume 1697 of *Lecture Notes in Math.*, pages 325–432. Springer, Berlin, 1998.

- **Eleuterio F. Toro.** *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics.* Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2009. A practical introduction.