

Trabajo Final de Máster

INVESTMAT

Tutor: Sergio Segura de León

Estudiant: Miguel Camarasa Buades

Título: Existencia y unicidad de soluciones de las leyes de conservación

Resum: El objetivo de este trabajo es el estudio del problema de Cauchy para las leyes de conservación. Este tipo de ecuaciones aparece en multitud de modelos físicos como consecuencia de principios básicos de conservación de ciertas magnitudes que gobiernan el modelo.

Un hecho fundamental que complica este tipo de ecuaciones es que las soluciones desarrollan discontinuidades de salto (ondas de choque) en tiempo finito, aún partiendo de condiciones iniciales perfectamente suaves, lo cual motiva la introducción de conceptos de solución débil. Desafortunadamente, puede existir más de una solución débil. Este hecho induce el estudio de condiciones que aseguren la unicidad de solución.

En este trabajo se introducirán diversos ejemplos de leyes de conservación (como la ecuación de Burgers), ejemplos donde aparecen ondas de choque, de no unicidad de soluciones débiles así como analizará la solución variacional de Lax, las condiciones de entropía y el teorema de unicidad de S.N. Kruzhkov.

Abstract: The goal of this project is to study conservation laws. This type of equations appears in many physical models as a consequence of basic principles where the model is governed by certain quantity which is conserved.

A main feature that complicates this type of equations is the development of jump discontinuities (shock waves) in the solution in finite time, even from perfectly smooth initial data, a fact that motivates the introduction of the concept of weak solution. Unluckily, there may be more than one weak solution. This fact induces the study of conditions that guarantee the uniqueness of the solution.

This project will introduce several examples of conservation laws (as Burgers' equation), examples where shock waves occur and nonuniqueness of weak solutions as well as will analyze the Lax variational solution, the entropy conditions and the uniqueness theorem by S.N. Kruzhkov.

Bibliografia:

- **Emmanuele DiBenedetto.** *Partial differential equations.* Second edition. Cornerstones. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010. ISBN: 978-0-8176-4551-9
- **Lawrence C. Evans.** *Partial differential equations.* Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. ISBN: 978-0-8218-4974-3
- **Lawrence C. Evans & Ronald F. Gariepy.** *Measure theory and fine properties of functions.* Revised edition. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2015. ISBN: 978-1-4822-4238-6
- **S. N. Kružkov.** First order quasilinear equations in several independent variables *Mat. Sbornik.* 10 (2) 1970 217—243.