Título: Sobre la continuidad en L^2 de operadores pseudodiferenciales
Títol: Sobre la continuïtat a L^2 d'operadors pseudodiferencials
Title: On the L^2 continuity of pseudodifferential operators

Tutor: David Jornet
Cotutor: Pablo Sevilla

Palabras clave: Operador diferencial, operador pseudodiferencial, continuidad en espacios L^2.

Resumen
Sea X un abierto de $\mathbb{R}^n$. Un operador $A : C_0^\infty(X) \to C^\infty(X)$ se dice *operador pseudodiferencial* de orden m y tipo ρ, δ, $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, y se escribe $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$, si

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} a(x,\xi)\hat{u}(\xi) d\xi, \quad x \in X,$$

donde el símbolo $a \in S^m_{\rho,\delta}(X)$, esto es, cumple

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|},$$

para cada x en cualquier subconjunto compacto fijado de X.

El ejemplo más simple es el de un operador en derivadas parciales con coeficientes constantes lineal. De hecho, si $p(\xi)$ es el polinomio característico (*símbolo*) del operador $P(D)$, se cumple $\widehat{P(D)u}(\xi) = p(\xi)\hat{u}(\xi)$ y usando la fórmula de inversión de la transformada de Fourier:

$$P(D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} p(\xi)\hat{u}(\xi) d\xi.$$

Esta clase concreta de operadores de tipo ρ, δ surge de manera natural al construir una paramétrix de un operador en derivadas parciales con coeficientes variables e hipoelíptico, lo que permite, en particular, analizar la regularidad de dicho operador diferencial en muchos espacios de funciones.

El objetivo del trabajo es estudiar cuándo $A \in L^m_{\rho,\delta}(X)$ es continuo de $L^2_{\text{comp}}(X)$ a $L^2_{\text{loc}}(X)$. Veremos, por ejemplo, que esto es cierto si $m \leq 0$ y $m < \frac{1}{2}n(\rho - \delta)$.

Referencias

[1] L. Hörmander. *On the L^2 Continuity of Pseudo-Differential Operators.* Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XXIV, 529–535 (1971).